Resolvent estimates on symmetric spaces of noncompact type (Problems in Semiclassical Analysis)

AUTHOR(S):

貝塚, 公一

CITATION:

貝塚, 公一. Resolvent estimates on symmetric spaces of noncompact type (Problems in Semiclassical Analysis). 数理解析研究所講究録 2011, 1763: 75-90

ISSUE DATE:

2011-09

URL:

http://hdl.handle.net/2433/171386

数理解析研究所講究録
第 1763 巻 2011 年 75-90

Resolvent estimates on symmetric spaces of noncompact type

東北大学 大学院理学研究科 貝塚 公一 (Koichi Kaizuka)
Graduate School of Science,
Tohoku University

1 序

本稿では, 非コンパクト型対称空間と呼ばれる完備リーマン多様体上での, 分散型方程式の時間大域的平滑化評価について考察する. 非コンパクト型対称空間の具体例は, 実双曲空間, 複素双曲空間, 有界対称領域等である.

始めに, Euclid 空間上の分散型方程式の時間大域的平滑化評価に対する既知の結果について述べる. 実数値 m 次斉次 $(m>1)$ 関数 $p(\xi)\in C^1(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ が, 任意の $\xi\neq 0$ に対して $\nabla p(\xi)\neq 0$ 満たすと仮定する. 次の形の分散型方程式を考える:

$$D_tu-p(D_x)u=f(t,x)\quad \text{in}\quad \mathbb{R}^{1+n}, \tag{1.1}$$

$$u(0,x)=\phi(x)\qquad \text{in}\quad \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

ここで, $u(t,x)$ は $\mathbb{R}^{1+n}$ 上の複素数値未知関数, $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$, $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ は任意に与えられた関数, $i=\sqrt{-1}$, $\partial_t=\partial/\partial t$, $D_t=-i\partial_t$, $p(D_x)=\mathcal{F}^{-1}p(\xi)\mathcal{F}$. ただし, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}v(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}v(x)dx$ により定義される Fourier 変換である. 特に, $p(\xi)=|\xi|^2$ の場合は $p(D_x)=-\Delta$ となり, Schrödinger 発展方程式となる.

$p(\xi)$ は実数値であることから, 初期値問題 (1.1)-(1.2) は時間正負の両向きに L^2-適切であり, 解 $u\in C(\mathbb{R};L^2(\mathbb{R}^n))$ は Fourier 変換により以下のように書ける.

$$\begin{aligned} u(t,x)&=e^{itp(D_x)}\phi(x)+iGf(t,x),\\ e^{itp(D_x)}\phi(x)&=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{i(x-y)\xi}e^{itp(\xi)}u(y)dyd\xi,\\ Gf(t,x)&=\int_0^t e^{i(t-s)p(D_x)}f(s,x)ds. \end{aligned}$$

分散型方程式の初期値問題 (1.1)-(1.2) の解の特異性は, 表象 $p(\xi)$ により生成される相空間上の Hamilton 流 $\exp(tH_p)(x,\xi)=(x+t\nabla p(\xi),\xi)$ に沿って伝播することが

知られている. $\pi : T^*\mathbb{R}^n \ni (x,\xi) \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ を底空間への射影とする. この時, 仮定 $\nabla p(\xi) \neq 0\ (\xi \neq 0)$ より, 任意の $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ に対して,

$$|\pi \circ \exp(tH_p)(x,\xi)| = |x + t\nabla p(\xi)| \to \infty \quad \text{as} \quad |t| \to \infty$$

が成り立つ. 速度ベクトル $\nabla p(\xi)$ に対して $|\nabla p(\xi)| \geqslant c|\xi|^{(m-1)}\ (\xi \neq 0)$ が成り立ち, $m > 1$ であることに注意すると, 解の特異性は各点において速度無限大で無限遠方へ逃げていくことが分かる. この時, 解の滑らかさが初期値よりも上がる平滑化効果という数学的現象が起こる.

Schrödinger 発展方程式に対しては, 解の特異性は測地線に沿って速度無限大で伝播し, 以下の時間大域的平滑化評価が成り立つことが知られている.

定理 1.1. Type-I: $n \geqslant 2$, $\delta > 1/2$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ.

$$\left\| \langle x\rangle^{-\delta} |D_x|^{1/2} e^{-it\Delta}\phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.3}$$

$$\left\| \langle x\rangle^{-\delta} |D_x| \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} f(s,\cdot)ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}. \tag{1.4}$$

Type-II: $n \geqslant 3$, $\delta = 1$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ.

$$\left\| \langle x\rangle^{-\delta} \langle D_x\rangle^{1/2} e^{-it\Delta}\phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.5}$$

$$\left\| \langle x\rangle^{-\delta} \langle D_x\rangle \int_0^t e^{-i(t-s)\Delta} f(s,\cdot)ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}. \tag{1.6}$$

ただし $\langle x\rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$, $s \in \mathbb{R}$ に対して $\langle D_x\rangle^s = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}$ とおいた.

これらの評価は, Ben-Artzi–Klainerman [2], Kato-Yajima [18] 等により得られている. 空間次元が低い場合には, 低周波数の評価に関して注意が必要である. 一次元 Euclid 空間の場合, (1.3) は成り立つが, (1.4) においては, $|D_x|$ を D_x で置き換える必要がある. また, TYPE-II 評価 (1.5) と (1.6) は, いかなる $\delta > 0$ に対しても成り立たない. また, 二次元 Euclid 空間の場合, 不等式 (1.5) は $\delta > 1$ のときに限り成り立つ. 一方で, (1.6) はいかなる $\delta > 0$ に対しても成り立たない. 後述するように, 低次元の場合にはレゾルベント $(-\Delta-\zeta)^{-1}$ が $\zeta = 0$ において特異性を持つため, Type-II の時間大域的平滑化評価が (一部) 不成立となる.

Type-I 評価は Chihara [6] により, m 次斉次 $(m > 1)$ 実主要型 Fourier マルチプライアーの場合に拡張された. また, Chihara [7] により, m 次斉次 $(m > 1)$ 楕円型 Fourier マルチプライアーに対して Type-I 評価の証明の簡単化, 及び Type-II 評価が得られている.

定理 1.2 ([7, Theorem 1]). $n \geqslant 2$ とする. $p(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ を m 次斉次実数値楕円型表象とする.
Type-I: $m > 1$, $\delta > 1/2$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ.

$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} |D_x|^{(m-1)/2} e^{itp(D_x)} \phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$
$$\left\| \langle x \rangle^{-\delta} |D_x|^{(m-1)} \int_0^t e^{i(t-s)p(D_x)} f(s,\cdot) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\langle x \rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}.$$

Type-II: $1 < m < n$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ.

$$\left\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)/2} e^{itp(D_x)} \phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$
$$\left\| \langle x \rangle^{-m/2} \langle D_x \rangle^{(m-1)} \int_0^t e^{i(t-s)p(D_x)} f(s,\cdot) ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})} \leqslant C \|\langle x \rangle^{m/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+n})}.$$

定理 1.2 は以下の一様レゾルベント評価から従う.

定理 1.3 ([7, Theorem 2]). $n \geqslant 2$ とする. $p(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ を m 次斉次実数値楕円型表象とする.
Type-I: $m > 1$, $\delta > 1/2$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ.

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \left| \left(|D_x|^{m-1} (p(D_x) - \zeta)^{-1} f, g \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right| \leqslant C \|\langle x \rangle^{\delta} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\langle x \rangle^{\delta} g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.7}$$

Type-II: $1 < m < n$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ.

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \left| \left(\langle D_x \rangle^{m-1} (p(D_x) - \zeta)^{-1} f, g \right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right| \leqslant C \|\langle x \rangle^{m/2} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\langle x \rangle^{m/2} g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.8}$$

注意. ここで, Type-I 評価 (1.7) に関しては, 階数 m に関して上限は現れないが, 低周波数まで込めた Type-II 評価 (1.8) に関しては, 階数 m の上限として空間次元 n が現れることに注意する.

Euclid 空間上の定係数分散型方程式に対する, 時間大域的平滑化評価に関する結果は莫大である. より詳細な評価や最近の進展については, Ruzhansky-Sugimoto [20], [21], [22], [23] 等を参照.

上で述べた平坦な Euclid 空間上での結果は, 作用素のスペクトル分解が具体的に与えられることが証明のカギとなっていて, 単純には変数係数の場合に拡張することはできない. 最近, Rodnianski-Tao [19] により, 擬微分作用素と散乱理論における Enss の方法を用いることで, 3 次元ユークリッド計量をコンパクト集合上で摂動した計量を備えた, 測地線が非捕捉的な完備 Riemann 多様体において, 以下のような時間大域的平滑化評価が得られている.

定理 1.4 ([19]). $(M,g)=(\mathbb{R}^3,g)$ を3次元ユークリッド計量をコンパクト集合上で滑らかに摂動した計量を備えた, 測地線が非捕捉的な完備 Riemann 多様体とする. Δ_M を M 上の Laplace-Beltrami 作用素, ∇_g を M 上のグラディエント作用素とする. このとき, 任意の $\sigma>0$ に対して次の評価が成り立つ.

$$\left\|\langle x\rangle^{-1/2-\sigma}\nabla_g e^{-\frac{it}{2}\Delta_M}\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)}+\left\|\langle x\rangle^{-3/2-\sigma}e^{-\frac{it}{2}\Delta_M}\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times M)}\leqslant C\left\|\phi\right\|_{\dot{H}^{1/2}(M)}.$$

ここで $\dot{H}^{1/2}(M)$ は M 上の 1/2 階の斉次 Sobolev 空間である.

より一般の完備 Riemann 多様体上においても, 分散型方程式に対する平滑化評価に関して様々な結果が得られている. Craig-Kappeler-Strauss [8] により, 平坦 Euclid 計量を短距離摂動した空間で非捕捉条件の下, Schrödinger 発展方程式の超局所的平滑化評価が得られている. Doi [9], [10], [11] により様々なクラスの Riemann 多様体上の Schrödinger 発展方程式に対する超局所的平滑化評価と測地線の大域的な挙動の詳細な関係が得られている. また, Laplace-Beltrami 作用素の高周波数に対するレゾルベント評価 (斉次 Schrödinger 発展方程式の解の高周波数に対する時間大域的平滑化評価に対応する) が様々なクラスの Riemann 多様体上で得られている (例えば, [3], [4], [5], [25], [26] 等を参照). 一方で, 低周波数まで込めた時間大域的平滑化評価については Euclid 空間, 及び遠方で Euclid 計量となる非捕捉的な Riemann 多様体以外ではあまり結果がないように思われる. 既存の結果では, 測地線に対して非捕捉条件を課した場合の Laplace-Beltrami 作用素の高周波数に対するレゾルベント評価には, 大きな違いは現れない. このことから, 時間大域的平滑化評価を考える場合には低周波数 (解の可積分性) に空間の特性が現れることが推測できる. 非コンパクト型対称空間で分散型方程式を考える場合には, 低周波数まで込めた時間大域的平滑化評価に対して, Fourier マルチプライアーの階数の上限として擬次元 (pseudo-dimension) という量が空間次元の代わりに現れることが分かった.

2 時間大域的平滑化評価と一様レゾルベント評価

以下で主定理を述べるための記号を設定する (詳細は3節を参照). $X=G/K$ を非コンパクト型対称空間とする. ここで, G は連結, 非コンパクト, 半単純, 中心有限な Lie 群. K は G の極大コンパクト部分群である. dx を X 上の Riemann 測度, Δ_X を X 上の Laplace-Beltrami 作用素とする. $L^2(X)=L^2(X,dx)$ を Riemann 測度 dx に関して, 二乗可積分な複素数値可測関数全体のなす Hilbert 空間とする. $d:X\times X\to[0,\infty)$ を X 上の Riemann 距離とする. "原点" $o\in X$ を $o=eK$ により定義し, $|x|=d(x,o)$, $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$ と定義する. $n\in\mathbb{N}$ を X の空間次元, $l\in\mathbb{N}$ を X の実ランク, $\nu\in\mathbb{N}$ を X の擬次元 (pseudo-dimension) とする. $G=KAN$ を Lie 群 G の Iwasawa 分解とする. 各 Lie 群 K, A, N の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$ とおく. このとき, 任

意の $g \in G$ は $g = k(g)\exp(H(g))n(g)$ と一意的に分解される. ここで $k(g) \in K$, $H(g) \in \mathfrak{a}$, $n(g) \in N$ である. M を A の K における中心化群とし, $B = K/M$ とおく. db を全測度が 1 の左 K-不変な B 上の測度とする. $X \times B$ 上の $\mathfrak{a}$-値関数 $A(x,b)$ を $A(x,b) = -H(g^{-1}k)$ ($x = g \cdot o, b = kM$) で定義する. このとき, 任意の $x \in X$, $(\lambda, b) \in \mathfrak{a}^* \times B$ に対して次が成り立つ.

$$-\Delta_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))} = (|\lambda|^2 + |\rho|^2)e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}.$$

ここで $\rho \in \mathfrak{a}^*$ は Lie 環 $\mathfrak{g}$ の制限ルート系から定まる定数ベクトルである. 従って $\{e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}\}_{\lambda,b}$ は Laplace-Beltrami 作用素の一般化固有関数系を成し, $(\lambda, b) \in \mathfrak{a}^* \times B$ によって助変数付けられる. このとき, 非コンパクト型対称空間上の Fourier 変換 (Helgason Fourier transform) が以下で定義される.

$$\mathcal{F}f(\lambda,b) = \int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))} f(x)dx, \quad (\lambda, b) \in \mathfrak{a}^* \times B.$$

W を $\mathfrak{a}^*$ に作用する Weyl 群とする. $\mathfrak{a}^*$ 上の W-不変な表象 $p(\lambda)$ に対して, $p(\lambda)$ を表象とする Fourier マルチプライアー P が, $P = \mathcal{F}^{-1} \circ p(\lambda) \circ \mathcal{F}$ により定義される. 特に $p(\lambda) = |\lambda|^2$ のとき, $P = -\Delta_X - |\rho|^2$ となる. $|\rho|^2 = \min \sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_X) > 0$ となることに注意する. また, Fourier マルチプライアー $|D|$, $\langle D \rangle$ を

$$\begin{aligned} |D| &= \sqrt{-\Delta_X - |\rho|^2} &&= \mathcal{F}^{-1} \circ |\lambda| \circ \mathcal{F}, \\ \langle D \rangle &= \sqrt{-\Delta_X - |\rho|^2 + 1} &&= \mathcal{F}^{-1} \circ \langle \lambda \rangle \circ \mathcal{F}. \end{aligned}$$

により定義する.

ここで, 非コンパクト型対称空間の具体例をいくつか挙げる.

(i) (実ランク 1 の非コンパクト型対称空間) 実ランク 1 の非コンパクト対称空間は以下の 4 種類の双曲空間である:

$$H^d(\mathbb{R}), H^d(\mathbb{C}), H^d(\mathbb{H}), H^2(\mathbb{O}).$$

それぞれ, 実, 複素, 四元数双曲空間, そして八元数双曲平面である.

(ii) (非コンパクト型 Hermite 対称空間) 非コンパクト型 Hermite 対称空間は有界対称領域と自然に同一視される. "規約" な有界対称領域は 6 種類ある: 4 種の古典型 $\mathrm{I}_{m,m'}$, II_m, III_m, IV_m と 2 種の例外型 V, VI.

非コンパクト型対称空間上で, 以下の分散型方程式を考える.

$$D_t u - Pu = f(t,x) \quad \text{in} \quad \mathbb{R} \times X, \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x) \quad \text{in} \quad X. \tag{2.2}$$

ここで P は W-不変, m 次斉次 $(m>1)$ 実数値楕円型表象 $p(\lambda)\in C_W^\infty(\mathfrak{a}^*\setminus\{0\})\cap C_W^1(\mathfrak{a}^*)$ により定義される Fourier マルチプライアーである. 特に, $p(\lambda)=|\lambda|^2$ のとき $P=-\Delta_X-|\rho|^2$ が成り立ち, 本質的には Schrödinger 発展方程式となる.

初期値問題 (2.1)-(2.2) は Euclid 空間と同様に時間正負の両向きに L^2-適切であり, 解 $u\in C(\mathbb{R};L^2(X))$ は以下のように書ける.

$$\begin{aligned}
u(t,x)&=e^{itP}\phi(x)+iGf(t,x),\\
e^{itP}\phi(x)&=w^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*\times B}e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}e^{itp(\lambda)}\mathcal{F}\phi(\lambda,b)|\mathbf{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db,\\
Gf(t,x)&=\int_0^t e^{i(t-s)P}f(s,x)ds.
\end{aligned}$$

以下が主定理である.

定理 2.1. (i) $m>1,\ \delta>1/2$ と仮定する. このとき, 以下の評価が成り立つ.

$$\left\|\langle x\rangle^{-\delta}|D|^{(m-1)/2}e^{itP}\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times X)}\leqslant C\|\phi\|_{L^2(X)},$$

$$\left\|\langle x\rangle^{-\delta}|D|^{(m-1)}\int_0^t e^{i(t-s)P}f(s,\cdot)ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times X)}\leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta}f\|_{L^2(\mathbb{R}\times X)}.$$

(ii) $1<m<\nu,\ \delta>m/2$ と仮定する. このとき, 以下の評価が成り立つ.

$$\left\|\langle x\rangle^{-\delta}\langle D\rangle^{(m-1)/2}e^{itP}\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times X)}\leqslant C\|\phi\|_{L^2(X)},\tag{2.3}$$

$$\left\|\langle x\rangle^{-\delta}\langle D\rangle^{(m-1)}\int_0^t e^{i(t-s)P}f(s,\cdot)ds\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times X)}\leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta}f\|_{L^2(\mathbb{R}\times X)}.\tag{2.4}$$

さらに, $l\geqslant 2$, $1<m<l$ が成り立つと仮定すると, 不等式 (2.3)-(2.4) が $\delta=m/2$ に対して成り立つ.

定理 2.1 は以下の一様レゾルベント評価から従う.

定理 2.2. (i) $m>1,\ \delta>1/2$ と仮定する. この時, 以下が成り立つ.

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\left|\left(|D|^{m-1}(P-\zeta)^{-1}f,g\right)_{L^2(X)}\right|\leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta}f\|_{L^2(X)}\|\langle x\rangle^{\delta}g\|_{L^2(X)}.$$

(ii) $1<m<\nu,\ \delta>m/2$ と仮定する. この時, 以下が成り立つ.

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}\left|\left(\langle D\rangle^{m-1}(P-\zeta)^{-1}f,g\right)_{L^2(X)}\right|\leqslant C\|\langle x\rangle^{\delta}f\|_{L^2(X)}\|\langle x\rangle^{\delta}g\|_{L^2(X)}.\tag{2.5}$$

さらに, $l\geqslant 2$, $1<m<l$, が成り立つと仮定すると, 不等式 (2.5) が $\delta=m/2$ に対して成り立つ.

注意. 定理 2.1 は, より一般の W-不変, m 次斉次 $(m>1)$ 実主要型表象 $p(\lambda) \in C_W^\infty(\mathfrak{a}^* \setminus \{0\}) \cap C_W^1(\mathfrak{a}^*)$ により定まる Fourier マルチプライアー P に対しても成り立つ.

以下では, Euclid 空間との違いについて述べる. 空間次元 n と擬次元 ν の関係であるが, 一般には空間次元 n が擬次元 ν より大きくなる場合もあり, その逆もありうる. 空間次元と擬次元に対しては以下が成り立つ:

(i) 擬次元 ν は常に $\nu \geqslant 3$ を満たす.

(ii) X の実ランクが 1 のとき, $\nu = 3$ が成り立つ.

(iii) $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の正規実形のとき, $\nu - n = n - l \geqslant 1$, よって $\nu > n$.

(iv) $\mathfrak{g}$ が even multiplicity condition を満たす時, $\nu \leqslant n$ が成り立つ. ここで, 等号成立条件は G が complex であることである.

(i) から, $P = -\Delta_X - |\rho|^2$ $(m=2)$ の場合は, 任意の非コンパクト型対称空間上で低周波数まで込めた一様レゾルベント評価 (2.5) が成り立つことが分かる. 特に, 二次元 Euclid 空間では成り立たなかった評価が, 二次元実双曲空間では成り立つことが分かる. この違いはレゾルベント核の表示からも見て取れる. $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ に対して, $g_{0,\zeta}(x)$ をレゾルベント $(-\Delta_{\mathbb{R}^n} - \zeta)^{-1}$ の核関数とする:

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^n} - \zeta)^{-1} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g_{0,\zeta}(x-y) u(y) dy.$$

レゾルベント核 $g_{0,\zeta}(x)$ は第一種 Hankel 関数 $H_z^{(1)}(\zeta)$ を用いることで以下のように表わされることが知られている:

$$g_{0,\zeta}(x) = \frac{i(\sqrt{\zeta})^{n/2-1}}{2^{n/2+1}\pi^{n/2-1}|x|^{n/2-1}} H_{n/2-1}^{(1)}(\sqrt{\zeta}|x|).$$

特に, 空間次元が $n = 1, 2$ または 3 の時, 次が得られる.

$$g_{0,\zeta}(x) = \begin{cases} \dfrac{ie^{i\sqrt{\zeta}|x|}}{2\sqrt{\zeta}} & n = 1, \\ \dfrac{i}{4} H_0^{(1)}(\zeta|x|) & n = 2, \\ \dfrac{e^{i\sqrt{\zeta}|x|}}{4\pi|x|} & n = 3. \end{cases}$$

$n = 1$ または $n = 2$ のとき, $x \neq 0$, $\zeta = re^{i\theta}$ $(0 < \theta < 2\pi)$ に対して以下が従う.

$$|g_{0,\zeta}(x)| \to \infty \quad \text{as} \quad r \downarrow 0.$$

この特異性により, Laplace-Beltrami に対する Type-II のレゾルベント評価が破綻する. $n \geqslant 3$ の時はこのような特異性は現れない. 一方, ある正規化のもと, d 次元実双曲空間におけるレゾルベント $(-\Delta_{H^d(\mathbb{R})} - |\rho|^2 - \zeta)^{-1}$ の核関数 $g_\zeta(r)$ $(r = |x|)$ は以下のように書ける: d が奇数の時,

$$g_\zeta(r) = c\left(-\frac{1}{\sinh r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{ie^{i\sqrt{\zeta}r}}{2\sqrt{\zeta}}\right).$$

また, d が偶数の時

$$g_\zeta(r) = c\int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}}(-\frac{\partial}{\partial s})\left(-\frac{1}{\sinh s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\frac{d}{2}-1}\left(\frac{ie^{i\sqrt{\zeta}s}}{2\sqrt{\zeta}}\right)ds.$$

特に, 2 次元実双曲空間 $H^2(\mathbb{R})$ に対しては次が得られる.

$$g_\zeta(r) = \frac{c}{2}\int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{\cosh s - \cosh r}}e^{i\sqrt{\zeta}s}ds.$$

この表示から分かるように, $\zeta = 0$ の近傍での特異性は現れない. 一般の次元の実双曲空間でも同様である.

最後に, 定理 2.2 は後述する命題 4.1, 補題 4.3, 命題 4.6 を用いることで, Chihara [7] とほぼ同様の方法で示される. 詳細については [17] を参照.

3 非コンパクト型対称空間上の Fourier 変換

本節では, 非コンパクト型対称空間上における Fourier 変換の基本性質を述べる (より詳しい詳細については, Helgason によるテキスト [12], [13], [14] を参照). $X = G/K$ を非コンパクト型対称空間とする. $\theta \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を Cartan 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ に付随する Cartan 対合とする. $\mathfrak{g}$ 上の内積を

$$\langle X, Y\rangle = -B(X, \theta Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3.1}$$

により定義する. ここで B は $\mathfrak{g}$ 上の Killing 形式である. このとき, X の $o = eK$ における接空間と $\mathfrak{p}$ を自然に同一視することで, (3.1) により $X = G/K$ 上に左 G-不変な Riemann 計量が定まる. $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}$ の極大可換部分環とし, $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とする. $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{a}$ の $\mathfrak{k}$ における centralizer とする. 任意の $\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\}$ に対して,

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \alpha(H)X \text{ for any } H \in \mathfrak{a}\}$$

とおく. $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ のとき, α を (制限) ルートと呼び, ルートの全体を Σ とおく. この時, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関するルート分解が得られる:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \{\oplus_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}_\alpha\}.$$

開集合 $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ を以下で定義する.

$$\mathfrak{a}' = \{H \in \mathfrak{a}; \alpha(H) \neq 0 \text{ for any } \alpha \in \Sigma\}.$$

$\mathfrak{a}'$ の連結成分を一つ固定し $\mathfrak{a}^+$ とおく. $\mathfrak{a}^+$ を Weyl chamber と呼ぶ. $\alpha \in \Sigma \subset \mathfrak{a}^*$ が正であるとは, 開集合 $\mathfrak{a}^+$ において正であるときをいう. 正ルート全体を Σ^+ とおく. 正のルート $\alpha \in \Sigma^+$, 正定数 c に対して $c\alpha \in \Sigma^+$ ならば, $c = 2^{-1}, 1,$ または 2 となることが知られている. $\Sigma_0^+ = \{\alpha \in \Sigma^+; 2^{-1}\alpha \notin \Sigma^+\}$ とおく. M' を A の K における正規化群とし, $W = M/M'$ と定義する. W を Weyl 群と呼ぶ. $w \in \mathbb{N}$ を Weyl 群 W の位数とする. $H \in \mathfrak{a}, \lambda \in \mathfrak{a}^*, s \in W$ に対して, $(s\lambda)(H) = \lambda(s^{-1} \cdot H)$ と定義する. ただし, $g \in G, X \in \mathfrak{g}$ に対して $g \cdot X = \mathrm{Ad}(g)X$ とおいた. この時, Weyl 群 W は $\mathfrak{a}^*$ の線形変換群として作用する. 冪零 Lie 環 $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{n} = \oplus_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha$ により定義する. $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha \alpha$ を多重度まで込めた, 正ルートの総和の半分とする. ここで $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha$ とおいた. $l \in \mathbb{N}$ を X の実ランク, $n \in \mathbb{N}$ を X の空間次元, そして $\nu \in \mathbb{N}$ を X の擬次元 (pseudo-dimension) とする:

$$\begin{aligned}
l &= \dim \mathfrak{a}, \\
n &= l + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} m_\alpha = l + \dim N, \\
\nu &= l + 2|\Sigma_0^+|.
\end{aligned}$$

ここで $|\Sigma_0^+|$ は Σ_0^+ の濃度である. また, 閉部分 Lie 群 A, N を $A = \exp \mathfrak{a}$, $N = \exp \mathfrak{n}$ により定義する. このとき, Lie 群 G に対して以下の分解が成り立つ.

$$\begin{cases}
G = KAN & \text{(Iwasawa)}, \\
G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K & \text{(Cartan)}.
\end{cases}$$

任意の $f \in C_0^\infty(X)$ に対して, 非コンパクト型対称空間上の Fourier 変換 (Helgason Fourier transform) が以下で定義される.

$$\mathcal{F}f(\lambda, b) = \int_X e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))} f(x)dx, \quad (\lambda, b) \in \mathfrak{a}^* \times B.$$

Helgason Fourier transform に対して, 以下の基本定理が Helgason により示されている:

(i) (Fourier 反転公式) 任意の $f \in C_0^\infty(X)$ に対して以下の反転公式が成り立つ.

$$f(x) = w^{-1} \int_{\mathfrak{a}^*\times B} e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))} \mathcal{F}f(\lambda, b)|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2} d\lambda db.$$

ここで $\boldsymbol{c}(\lambda)$ は Harish-Chandra $\boldsymbol{c}$-関数である.

(ii) (Plancherelの定理) Fourier変換$\mathcal{F}$は以下のユニタリ同型に一意的に拡張される:

$$\mathcal{F} : L^2(X) \longrightarrow L^2_W(\mathfrak{a}^* \times B, w^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db).$$

ここで, $\psi \in L^2_W(\mathfrak{a}^* \times B, w^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db)$ とは, $\psi \in L^2(\mathfrak{a}^* \times B, w^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db)$ かつ, 任意の $s \in W$ に対して

$$\int_B e^{(is\lambda+\rho)(A(x,b))}\psi(s\lambda, b)db = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}\psi(\lambda, b)db.$$

を満たすことである.

非コンパクト型対称空間上で Fourier マルチプライアーを定義する. $p(\lambda)$ を W-不変で遠方で高々多項式増大度である $\mathfrak{a}^*$ 上の関数とする. この時, 任意の $f \in C_0^\infty(X)$ に対して W-不変性から以下が従う.

$$\int_B e^{(is\lambda+\rho)(A(x,b))}p(s\lambda)\mathcal{F}f(s\lambda, b)db = \int_B e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}p(\lambda)\mathcal{F}f(\lambda, b)db.$$

これより, $p(\lambda)$ を表象とする Fourier マルチプライアー P が任意の $f \in C_0^\infty(X)$ に対して以下で定義される.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \mathcal{F}^{-1}[p(\lambda)\mathcal{F}f](x) \\ &= w^{-1}\int_{\mathfrak{a}^* \times B} e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))}p(\lambda)\mathcal{F}f(\lambda, b)|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db. \end{aligned}$$

ここで, Abel 変換と呼ばれる積分変換を導入する. 任意の $f \in C_0^\infty(X)$ に対して, f の Abel 変換 $\mathcal{A}f(H, kM)$ を以下で定義する.

$$\mathcal{A}f(H, kM) = e^{\rho(H)}\int_N f(ke^H n \cdot o)dn, \quad (H, kM) \in \mathfrak{a} \times B.$$

Abel 変換を用いることで, Fourier 変換が以下のように表現できる.

$$\mathcal{F}f(\lambda, b) = \int_{\mathfrak{a}} e^{-i\lambda(H)}\mathcal{A}f(H, b)dH.$$

つまり, 非コンパクト型対称空間上の Fourier 変換は, Abel 変換と $\mathfrak{a}$ 上の Euclid Fourier 変換の合成として書ける. この表現は対称空間上の調和解析でよく用いられ, 対称空間上での Fourier 変換に対する多くの議論を Euclid 空間 $\mathfrak{a}$ 上の解析に帰着させることができる. 特に, Fourier マルチプライアー P は以下のように表現できる:

$$\mathcal{F}[Pf](\lambda, b) = \mathcal{F}_{\mathfrak{a}}[p(D_H)\mathcal{A}f(\cdot, b)](\lambda).$$

ここで, $p(D_H)$ は $p(\lambda)$ を表象とする $\mathfrak{a}$ 上の Fourier マルチプライアーであり, $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ は以下で定義される $\mathfrak{a}$ 上の Fourier 変換である.

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}\phi(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} e^{-i\lambda(H)}\phi(H)dH.$$

4 Abel変換と分数階積分

本節では, 証明の Key となる Abel 変換と分数階積分の重み付き L^2-空間における連続性について考察する.

命題 4.1. 任意の $\delta \geqslant 0$ に対して, 以下の線形写像は連続である.

$$\mathcal{A} : L^{2,\delta}(X) \to J^{-1}L^{2,\delta}(\mathfrak{a} \times B).$$

ただし, $J = \boldsymbol{c}^{-1}(D_H)$ は $\boldsymbol{c}^{-1}(\lambda)$ を表象とする $\mathfrak{a}$ 上の Fourier マルチプライアーである. また, $L^{2,\delta}(X) = \langle x\rangle^{-\delta}L^2(X)$, $L^{2,\delta}(\mathfrak{a} \times B) = \langle H\rangle^{-\delta}L^2(\mathfrak{a} \times B, dxdb)$ とおいた.

表象 $\boldsymbol{c}^{-1}(\lambda)$ は $\mathfrak{a}^*$ における (Weyl wall と呼ばれる) 超平面の有限和集合 $\cup_{\alpha\in\Sigma^+} \operatorname{Ker} A_\alpha$ において零になる. ここで $A_\alpha(\lambda) = \langle \alpha, \lambda\rangle$ $(\alpha \in \Sigma, \lambda \in \mathfrak{a}^*)$ とおいた. この退化が Abel 変換の $\mathfrak{a}$ 上の大域的な解析において障害となるが, 以下の補題を用いることでその困難を回避できる.

補題 4.2. $\mathfrak{a}^*$ 上の関数 $q(\lambda)$, $e(\lambda)$, $e_0(\lambda)$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
q(\lambda) &= c_0^{-1}\Pi_{\alpha\in\Sigma_0^+}\langle i\lambda, \alpha_0\rangle,\\
e(\lambda) &= \boldsymbol{c}^{-1}(\lambda)/q(\lambda),\\
e_0(\lambda) &= \Pi_{\alpha\in\Sigma_0^+}\left(1 + \langle\lambda, \alpha_0\rangle^2\right)^{(m_\alpha+m_{2\alpha}-2)/4}.
\end{aligned}$$

このとき, $\boldsymbol{c}^{-1}(\lambda) = q(\lambda)e(\lambda)$ かつ $e^{\pm}(\lambda) \in S(e_0^{\pm}(\lambda); \langle H\rangle^{-2}|dH|^2 + |d\lambda|^2)$. ここで, c_0 はある正定数であり, $\alpha \in \Sigma_0^+$ に対して, $\alpha_0 = \alpha/|\alpha|$ とおいた. 擬微分作用素のシンボルクラス $S(m, g)$ の定義については [16] を参照.

この補題により, 表象 $\boldsymbol{c}^{-1}(\lambda)$ を多項式 $q(\lambda)$ と "楕円型" の表象 $e(\lambda)$ に分解することができる. 命題 4.1 は, 空間 X, $\mathfrak{a}$ をそれぞれ 2 進分解し, 補題 4.2 を用いて作用素ノルムを評価することで証明される. その際, 微分作用素 $q(D_H)$ の局所性と $e(D_H)$ の楕円性により Abel 変換のサポートの大きさを解析できることがカギとなる. 詳細については [17] を参照.

Abel 変換の重み付き L^2-連続性を用いることで, Euclid 空間で成り立つ Fourier マルチプライアーに対する評価が対称空間上でも成り立つ: $\delta_1, \delta_2 \geqslant 0$ とする. W-不変で遠方において高々多項式増大度である表象 $p(\lambda)$ に対して, 以下の重み付き評価が成り立つと仮定する.

$$\left\|\langle H\rangle^{-\delta_1}p(D_H)\phi\right\|_{L^2(\mathfrak{a})} \leqslant C\left\|\langle H\rangle^{\delta_2}\phi\right\|_{L^2(\mathfrak{a})}. \tag{4.1}$$

この時, 任意の $f \in C_0^\infty(X)$ に対して, Abel 変換に対する反転公式

$$f = w^{-1}\mathcal{A}^*\bar{J}J\mathcal{A}f$$

を用いると, 次のように書ける.

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle^{-\delta_1}Pf\\&=w^{-1}\langle x\rangle^{-\delta_1}\mathcal{A}^*\bar{J}p(D_H)J\mathcal{A}f\\&=w^{-1}\langle x\rangle^{-\delta_1}\mathcal{A}^*\bar{J}\langle H\rangle^{\delta_1}(\langle H\rangle^{-\delta_1}p(D_H)J\mathcal{A}f).\end{aligned}$$

Abel 変換の重み付き L^2-連続性より,

$$\left\|\langle x\rangle^{-\delta_1}Pf\right\|_{L^2(X)}\leqslant C\left\|\langle H\rangle^{-\delta_1}p(D_H)J\mathcal{A}f\right\|_{L^2(\mathfrak{a}\times B)}.$$

Euclid 空間上での評価 (4.1) と再び Abel 変換の重み付き L^2-連続性を用いることで

$$\begin{aligned}\left\|\langle x\rangle^{-\delta_1}Pf\right\|_{L^2(X)}&\leqslant C\left\|\langle H\rangle^{\delta_2}J\mathcal{A}f\right\|_{L^2(\mathfrak{a}\times B)}\\&\leqslant C\left\|\langle x\rangle^{\delta_2}f\right\|_{L^2(X)}\end{aligned}$$

が得られる. よって, 対称空間上で (4.1) に対応する評価が成り立つことが分かる.

同様の議論により, 対称空間上の Fourier 変換に対する Fourier 制限評価が得られる: $a(\lambda)\in C_W^\infty(\mathfrak{a}^*\setminus\{0\})$ を正値な 1 次斉次楕円型表象とする. X の “相空間” $\mathfrak{a}^*\times B$ における, $a(\lambda)$ に関するレベル集合 $\Sigma(\tau)$ $(\tau>0)$ を次で定める.

$$\Sigma(\tau)=\{(\lambda,b)\in\mathfrak{a}^*\times B;a(\lambda)=\tau\}.$$

又, レベル集合 $\Sigma(\tau)$ には $w^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\lambda db$ から誘導される測度を付随させる. ただし, 実ランクが 1 の場合は $w^{-1}|\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}d\delta_{|\lambda|=\tau}db$ (ここで $d\delta_{|\lambda|=\tau}$ は, 2 点集合 $\{|\lambda|=\tau\}$ における Dirac 測度) を考える. このとき, Chihra [7] における Euclid 空間上の Fourier 制限評価を用いることで以下が得られる.

補題 4.3. (i) 任意の $\theta>0$ に対して次が成り立つ.

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\Sigma(\tau))}\leqslant C\|\langle x\rangle^{1/2+\theta}f\|_{L^2(X)}.$$

(ii) $l=1$ または $l\geqslant 3$ のとき, $0<\theta<1$, $l=2$ のとき, $0<\theta<1/2$ と仮定する. この時, 以下が成り立つ.

$$\|s(\tau,\cdot)\mathcal{F}f(\tau\cdot,\cdot)-s(\sigma,\cdot)\mathcal{F}f(\sigma\cdot,\cdot)\|_{L^2(\Sigma(1))}\leqslant C|\tau-\sigma|^\theta\|\langle x\rangle^{1/2+\theta}f\|_{L^2(X)}.$$

ここで $\tau>0$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ に対して, $s(\tau,\lambda)=\tau^{(l-1)/2}\boldsymbol{c}^{-1}(\tau\lambda)/\boldsymbol{c}^{-1}(\lambda)$ とおいた.

(iii) $l=1$ の時 $0<\theta<1$, $l\geqslant 2$ の時 $0<\theta<(l-1)/2$ と仮定する. このとき

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\Sigma(\tau))}\leqslant C\tau^\theta\|\langle x\rangle^{1/2+\theta}f\|_{L^2(X)}.$$

Chihara [7] における一様レゾルベント評価において, 以下の評価が重要な役割を果たす.

定理 4.4 ([24, Theorem B^*]). $0 < \alpha < n$, $\beta < n/2$, $\gamma < n/2$ かつ $\alpha = \beta + \gamma$ と仮定する. この時, 以下が成り立つ:

$$\||x|^{-\beta}|D_x|^{-\alpha}|x|^{-\gamma}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

定理の系として以下が得られる.

系 4.5. $0 < \alpha < n/2 + \min\{0, \alpha, \beta\}$, $\beta + \gamma \geqslant \alpha$ と仮定する. この時, 以下が成り立つ:

$$\|\langle x\rangle^{-\beta}|D_x|^{-\alpha}\langle x\rangle^{-\gamma}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

この定理, 及び系に関して, 空間次元が現れることに注意する. ここに空間次元が表れるために, 定理 1.2, 定理 1.3 における低周波数まで込めた Type-II 評価において, Fourier マルチプライアーの階数の上限として空間次元が現れる. 一方, 非コンパクト型対称空間上では分数階積分に対して, 以下の評価がなりたつ.

命題 4.6. $0 < \sigma < \nu/2 + \min\{0, \delta, \delta'\}$, $\delta + \delta' > \sigma$ と仮定する. この時, 以下の評価が成り立つ:

$$\left\|\langle x\rangle^{-\delta}|D|^{-\sigma}\langle x\rangle^{-\delta'}f\right\|_{L^2(X)} \leqslant C\left\|f\right\|_{L^2(X)}.$$

Euclid 空間における分数階積分における空間次元に代わって, 非コンパクト型対称空間においては擬次元 (pseudo-dimension) が現れることが分かる.

以下では, 命題 4.6 の証明で Key となる Lie 群上の合成積の性質について述べる. Euclid 空間上では合成積に対する Young の不等式から, $L^2(\mathbb{R}^n) * L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が従う. Hölder の不等式より $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n)$ $(\delta > n/2)$ が成り立つので, 結局次が得られる.

$$L^2(\mathbb{R}^n) * L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^{2,-\delta}(\mathbb{R}^n), \quad \delta > n/2.$$

一方, 連結, 半単純, 中心有限な Lie 群 G に対し, dg を G 上の Harr 測度とすると, G 上の合成積が以下で定義される.

$$u * v(g) = \int_G u(g_1)v(g_1^{-1}g)dg(g_1) \quad u, v \in C_0(G).$$

また, 非コンパクト型対称空間 $X = G/K$ において, 合成積に相当する双線形作用素 $\times$ が以下で定義される.

$$u \times v(g \cdot o) = \tilde{u} * \tilde{v}(g) \quad u, v \in C_0(X).$$

ここで u のリフト関数 $\tilde{u}$ を $\tilde{u}(g) = u(g \cdot o)$ とおいた. Euclid 空間と同様に Hölder の不等式より, $L^2(G) * L^2(G) \subset L^\infty(G)$, $L^2(X) \times L^2(X) \subset L^\infty(X)$ が成り立つ. しかし, 非コンパクト型対称空間の球の体積は測地距離に関して指数関数的に増大するため, 任意の $\delta > 0$ に対して $L^\infty(X) \not\subset L^{2,-\delta}(X)$. よって, 単純に Euclid 空間における上述の方法からは, L^2-関数の合成積に対する重み付き評価は得られない. 半単純 Lie 群上の合成積に関しては, 以下の評価が知られている.

定理 4.7 ([15, Theorem 1]). G を連結, 半単純, 中心有限な Lie 群とする. $w(g)$ を G 上の正値, 連続, 両側 K-不変な関数で, $\int_G \varphi_0^2(g) w^{-1}(g) dg = 1$ を満たすと仮定する. この時, 次が成り立つ

$$\|f_1 * f_2\|_{L^2(G, w^{-1}dg)} \leqslant \|f_1\|_{L^2(G,dg)} \|f_2\|_{L^2(G,dg)}.$$

ここで $\varphi_0(g)$ は $\varphi_0(g) = \int_K e^{-\rho(H(gk))} dk$ により定義される G 上の elementary spherical function である.

elementary spherical function φ_0 は両側 K-不変であり, 以下の評価が知られている.

$$\begin{aligned} \varphi_0(\exp H) &\leqslant C \left\{ \Pi_{\alpha \in \Sigma_0^+} (1 + \langle \alpha, H \rangle) \right\} e^{-\rho(H)} \\ &\leqslant C \langle H \rangle^{|\Sigma_0^+|} e^{-\rho(H)} \quad \text{on} \quad \overline{\mathfrak{a}^+}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

評価 (4.2) により, 定理 4.7 において $w(g) = \langle g \cdot o \rangle^{2\delta}$ ($\delta > \nu/2$) と置くことで, 次の系が得られる.

系 4.8. 任意の $\delta > \nu/2$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|f_1 \times f_2\|_{L^{2,-\delta}(X)} &\leqslant C \|f_1\|_{L^2(X)} \|f_2\|_{L^2(X)}, \\ \|f_1 \times f_2\|_{L^2(X)} &\leqslant C \|f_1\|_{L^{2,\delta}(X)} \|f_2\|_{L^2(X)}. \end{aligned}$$

命題 4.6 は, Anker-Ji [1] による, $|D|^{-\sigma}$ の核関数に対する評価と, 系 4.8 を用いることで示される. 詳細は [17] を参照.

参考文献

[1] J.-P. Anker and L. Ji, *Heat kernel and Green function estimates on noncompact symmetric spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 6, 1035–1091.

[2] M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, J. Anal. Math. **58** (1992), 25–37.

[3] J.-M. Bouclet, *Resolvent estimates for the Laplacian on asymptotically hyperbolic manifolds*, Ann. Henri Poincaré **7** (2006), no. 3, 527–561.

[4] F. Cardoso, G. Popov, and G. Vodev, *Semi-classical resolvent estimates for the Schrödinger operator on non-compact complete Riemannian manifolds*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **35** (2004), no. 3, 333–344.

[5] F. Cardoso and G. Vodev, *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds. II*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 4, 673–691.

[6] H. Chihara, *Smoothing effects of dispersive pseudodifferential equations*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 9-10, 1953–2005.

[7] ———, *Resolvent estimates related with a class of dispersive equations*, J. Fourier Anal. Appl. **14** (2008), no. 2, 301–325.

[8] W. Craig, T. Kappeler, and W. Strauss, *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 8, 769–860.

[9] S.-I. Doi, *Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 3, 679–706.

[10] ———, Commutator algebra and abstract smoothing effect, J. Funct. Anal. **168** (1999), no. 2, 428–469.

[11] ———, Smoothing effects for Schrödinger evolution equation and global behavior of geodesic flow, Math. Ann. **318** (2000), no. 2, 355–389.

[12] S. Helgason, "Groups and geometric analysis", Pure and Applied Mathematics, vol. 113, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.

[13] ———, "Geometric analysis on symmetric spaces", Mathematical Surveys and Monographs, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[14] ———, "Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces", Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.

[15] C. Herz, *Sur le phénomène de Kunze-Stein*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970), A491–A493 (French).

[16] L. Hörmander, "The analysis of linear partial differential operators. III", Vol. 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[17] K. Kaizuka, *Resolvent estimates on symmetric spaces of noncompact type*, arXiv.

[18] T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.

[19] I. Rodnianski and T. Tao, *Longtime decay estimates for the Schrödinger equation on manifolds*, Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, Ann. of Math. Stud., vol. 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007, pp. 223–253.

[20] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *A new proof of global smoothing estimates for dispersive equations*, Advances in pseudo-differential operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 155, Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 65–75.

[21] ———, *A smoothing property of Schrödinger equations in the critical case*, Math. Ann. **335** (2006), no. 3, 645–673.

[22] ———, *Comparison of estimates for dispersive equations*, Further progress in analysis, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, pp. 486–494.

[23] M. Ruzhansky and M. Sugimoto, *On the smoothing properties of dispersive partial differential equations*, Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B14, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009, pp. 103–123.

[24] E. M. Stein and G. Weiss, *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. Math. Mech. **7** (1958), 503–514.

[25] G. Vodev, *Local energy decay of solutions to the wave equation for nontrapping metrics*, Ark. Mat. **42** (2004), no. 2, 379–397.

[26] ———, *Uniform estimates of the resolvent of the Laplace-Beltrami operator on infinite volume Riemannian manifolds with cusps*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 7-8, 1437–1465.